

arch - ARCH 系モデル 【 評価版 】

arch コマンドは ARCH, GARCH 等、種々の ARCH 系モデルに対応した推定コマンドで、ボラティリティをモデル化する機能を提供します。

1. ARCH 系モデル	
2. ARCH/GARCH	Example 1
	Example 2
3. 非対称モデル	Example 3
	Example 4
4. 誤差分布	Example 5
5. 制約付きの ARCH モデル	Example 6
補足 1	

1. ARCH 系モデル

時系列の変動性 (volatility) は時間的に一定とは言えません。変動の小さい時期と変動の大きな時期とがそれぞれある程度の期間持続することは経済系、特に金融系の時系列で良く見られる傾向です。ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) 系のモデルはこの時間依存の volatility を観測された過去の volatility の関数として表現しようとするものです。実際、変動のモデルの方が条件付き平均値のモデルよりも高い関心を呼ぶケースもあります。さらに arch コマンドで実装されているように、回帰変数を用いることによって volatility 中の構造的成分をモデル化することもできます。

arch は各種 ARCH 系のモデルを条件付き最尤法 (conditional maximum likelihood) を用いてフィットさせます。“条件付き”という意味は、イノベーション (innovations) の 2 乗値 ϵ_t^2 、及び分散 σ_t^2 に対し仮定された、あるいは推定された値 (priming values) に基づき尤度の計算が行われることによるものです。

Engle (1982) によって提唱された ARCH(m) モデルの基本形は次のように表現されます。

$$y_t = \mathbf{x}_t\boldsymbol{\beta} + \epsilon_t \quad (\text{conditional mean}) \quad (1a)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\epsilon_{t-1}^2 + \gamma_2\epsilon_{t-2}^2 + \cdots + \gamma_m\epsilon_{t-m}^2 \quad (\text{conditional variance}) \quad (1b)$$

ただし ϵ_t^2 は残差（または innovations）の 2 乗であり、 γ_i は ARCH パラメータを意味します。このモデルの特徴は条件付き平均と条件付き分散の双方がモデル化されている点です。特に後者は過去の予測されない innovation の大きさ、すなわち ϵ_t^2 の関数として表現されています。

(1) 式に対し条件付き分散のラグ項を追加することによって次の GARCH(m, k) モデルが構成されます。

$$y_t = \mathbf{x}_t\beta + \epsilon_t \quad (2a)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\epsilon_{t-1}^2 + \gamma_2\epsilon_{t-2}^2 + \cdots + \gamma_m\epsilon_{t-m}^2 + \delta_1\sigma_{t-1}^2 + \delta_2\sigma_{t-2}^2 + \cdots + \delta_k\sigma_{t-k}^2 \quad (2b)$$

ただし γ_i は ARCH パラメータであり、 δ_i は GARCH パラメータを表します。

評価版では割愛しています。

2. ARCH/GARCH

▷ Example 1: ARCH/GARCH モデル

ここでは Example データセット wpi1.dta を用いて ARCH/GARCH モデルのフィットを行います。

```
. use https://www.stata-press.com/data/r19/wpi1.dta *1
```

このデータセット中には米国の卸売物価指数 (wholesale price index) に関するデータが 1960q1 から 1990q4 にわたり四半期ごとに記録されています。なお、変数 ln_wpi の表す値は $\ln(\text{wpi})$ を意味します。

```
. list if _n <= 4 | _n >= (_N - 3), separator(4) *2
```

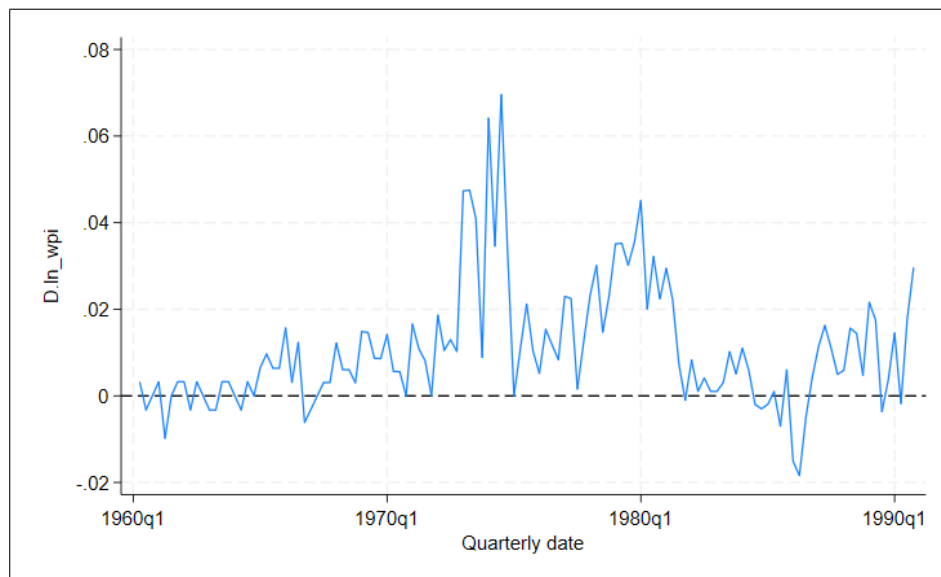
	wpi	t	ln_wpi
1.	30.7	1960q1	3.424263
2.	30.8	1960q2	3.427515
3.	30.7	1960q3	3.424263
4.	30.7	1960q4	3.424263
121.	111	1990q1	4.70953
122.	110.8	1990q2	4.707727
123.	112.8	1990q3	4.725616
124.	116.2	1990q4	4.755313

*¹ メニュー操作：File ▷ Example Datasets ▷ Stata 19 manual datasets と操作、Time-Series Reference Manual [TS] の arch の項よりダウンロードする。

*² メニュー操作：Data ▷ Describe data ▷ List data

ここで `D.ln_wpi` (`ln_wpi` の 1 階差分) についてプロットしてみます。

```
. twoway (line D.ln_wpi t), yline(0) *3
```



このプロットより価格変動 (volatility) の大きい時期と比較的平穏な時期が混在していることが見て取れます。

評価版では割愛しています。

*3 メニュー操作 : Graphics ▸ Twoway graph (scatter, line, etc.)

ARCH 効果の存在が確認できたところで GARCH(1,1) モデルのフィットを行ってみます。なお、D.ln_wpi を y_t と書いた場合、ARCH(1) モデルは (1) 式より

$$\begin{cases} y_t = \mathbf{x}_t\boldsymbol{\beta} + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\epsilon_{t-1}^2 \end{cases} \quad (3)$$

のように書けるのに対し、それを拡張した GARCH(1,1) モデルは (2) 式より

$$\begin{cases} y_t = \mathbf{x}_t\boldsymbol{\beta} + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\epsilon_{t-1}^2 + \delta_1\sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad (4)$$

のように表現される点にご注意ください。

- Statistics ▸ Time series ▸ ARCH/GARCH ▸ ARCH and GARCH models と操作
- Model タブ: Dependent variable: D.ln_wpi
Specify maximum lags: ARCH maximum lag: 1
GARCH maximum lag: 1

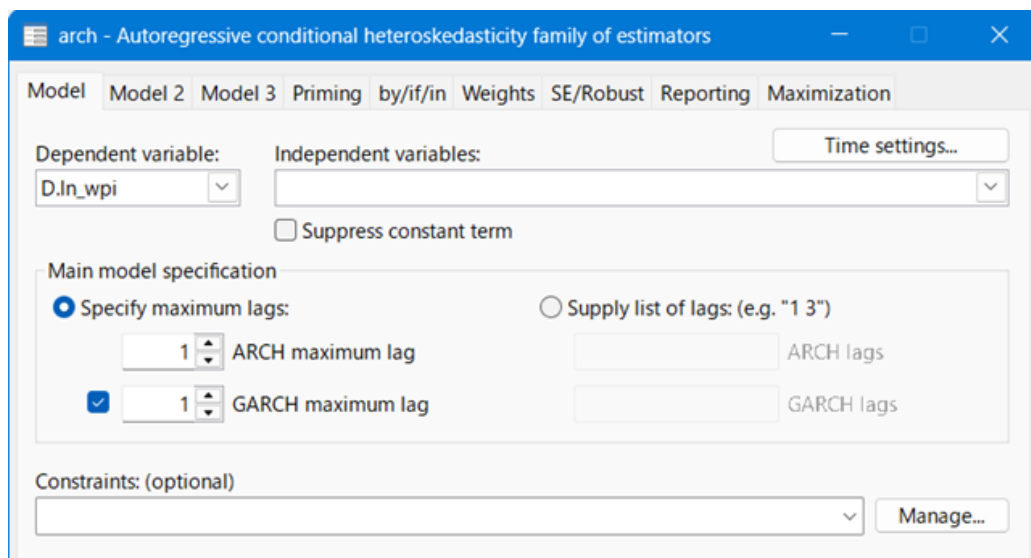


図 2 arch ダイアログ - Model タブ

```
. arch D.ln_wpi, arch(1/1) garch(1/1)
```

```
(setting optimization to BHHH)
```

```
Iteration 0: Log likelihood = 355.23458
```

```
Iteration 1: Log likelihood = 365.64586
```

```
Iteration 2: Log likelihood = 366.89268
```

```
Iteration 3: Log likelihood = 369.65205
```

```
Iteration 4: Log likelihood = 370.42566
```

```
(switching optimization to BFGS)
```

```
Iteration 5: Log likelihood = 372.41703
```

```
Iteration 6: Log likelihood = 373.11099
```

```
Iteration 7: Log likelihood = 373.1894
```

```
Iteration 8: Log likelihood = 373.23277
```

```
Iteration 9: Log likelihood = 373.23394
```

```
Iteration 10: Log likelihood = 373.23397
```

```
ARCH family regression
```

```
Sample: 1960q2 thru 1990q4
```

```
Number of obs = 123
```

```
Wald chi2(.) = .
```

```
Log likelihood = 373.234
```

```
Prob > chi2 = .
```

D.ln_wpi	OPG					
	Coefficient	std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
ln_wpi						
_cons	.0061167	.0010616	5.76	0.000	.0040361	.0081974
ARCH						
arch						
l1.	.4364123	.2437428	1.79	0.073	-.0413147	.9141394
garch						
l1.	.4544606	.1866606	2.43	0.015	.0886127	.8203086
_cons	.0000269	.0000122	2.20	0.028	2.97e-06	.0000508

arch コマンドの出力より (4) 式中のパラメータは次のように推定されたことが読み取れます。

平均の式: $\hat{\beta}_0 = 0.0061$

分散の式: $\hat{\gamma}_0 = 0.000$ $\hat{\gamma}_1 = 0.436$ $\hat{\delta}_1 = 0.454$

念のためモデル式を書き出しておくと次のようになります。ただし $y_t = \ln(\text{wpi}_t) - \ln(\text{wpi}_{t-1})$ を意味します。

$$\begin{cases} y_t = 0.0061 + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 = 0.436\epsilon_{t-1}^2 + 0.454\sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

なお、 $\hat{\gamma}_1$ については p 値が 0.073 であるので 0 という可能性を排除できない点に注意してください。

出力上、モデルの有意性を問う Wald 検定の結果が表示されていません。本来であれば平均に関する式について Wald 検定の結果が表示されてくるのですが、このモデルでは定数項しか設定されていないので、検定対象となる係数値が存在しないわけです。◁

▷ Example 2: ARMA 過程を伴うモデル

評価版では割愛しています。

3. 非対称モデル

評価版では割愛しています。

4. 誤差分布

評価版では割愛しています。

5. 制約付きの ARCH モデル

評価版では割愛しています。

補足 1 – ARCH/GARCH 系モデル式

評価版では割愛しています。

